Chapitre 1

Une approche intergénérationnelle

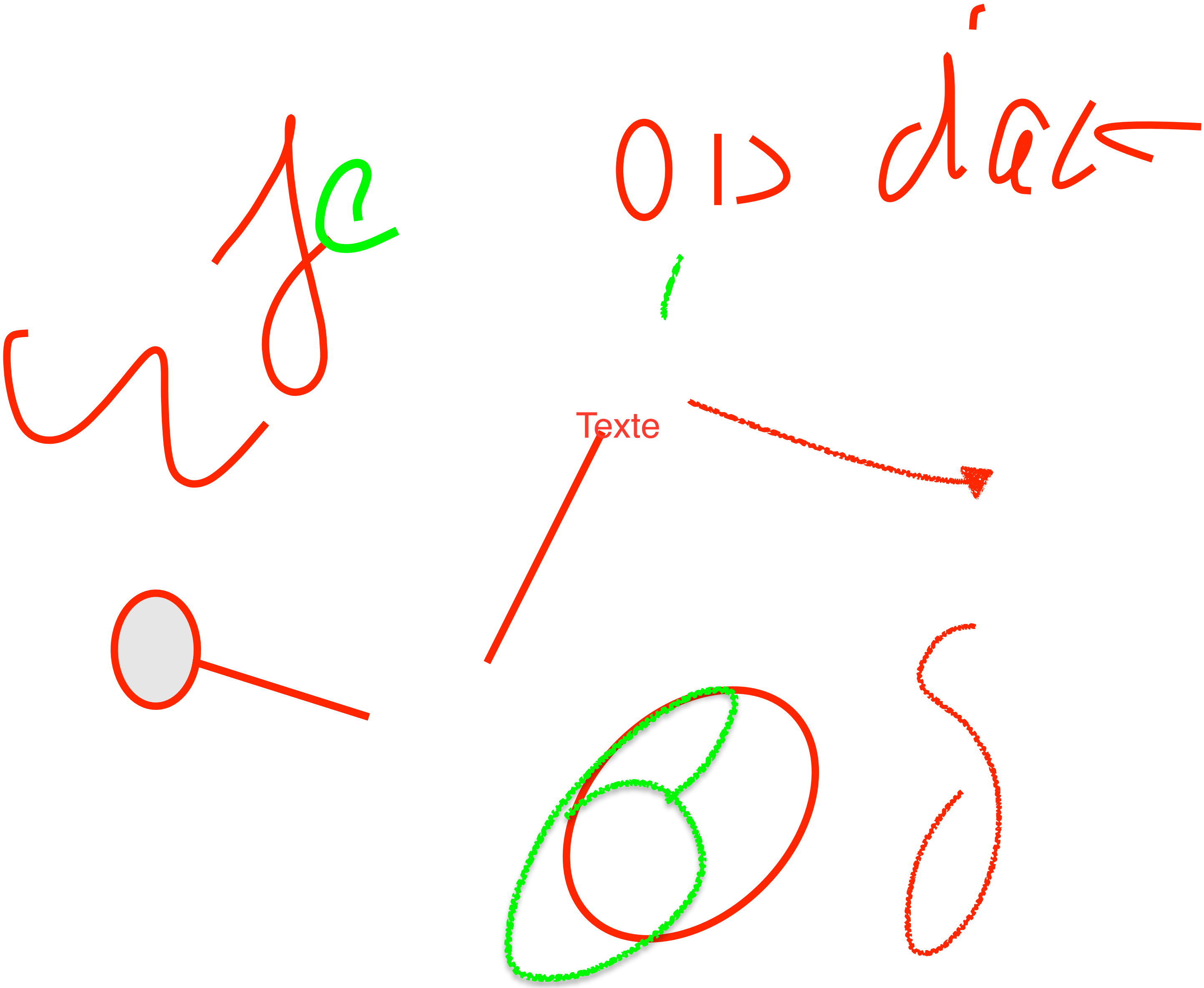

Table des matières

1.1 Introduction

- La Sécurité Sociale
- La question de la retraite
- Les projections démographiques
- Les réformes
- Le débat capitalisation/répartition

1.2 Le modèle à deux périodes

- Présentation de la période 1

— un individu né en t vit deux périodes : t et $t+1$

— En période 1, il est jeune et offre une unité de travail de manière inélastique

— il perçoit le salaire w_t et consomme c_{1t} biens

— on note $s_t = w_t - c_{1t}$ l'épargne (si $s_t > 0$) ou la dette (si $s_t < 0$) de l'agent

- Présentation de la période 2

— en période 2, il est vieux et il consomme c_{2t+1}

— son revenu est composé de l'épargne constituée lorsqu'il était jeune, épargne qui est rémunérée : $(1 + r_{t+1})s_t$

— si cette quantité est négative, il remboursera sa dette

— r_{t+1} représente le taux d'intérêt réel en vigueur en $t+1$ et il est déterminé en $t+1$ (et non en t)

— Mais l'individu choisit sa consommation (et donc son épargne) de première période avant de connaitre le taux de rendement de l'épargne

— en clair, en t, il doit donc anticiper le taux d'intérêt.

— on va admettre que les anticipations sont parfaites

1.2.1 Les contraintes budgétaires

- Les deux contraintes

$$c_{1t} + s_t \leq w_t,\ c_{1t} \geq 0 \tag{1.1}$$

$$c_{2t+1} \leq (1 + r_{t+1})s_t,\ c_{2t+1} \geq 0 \tag{1.2}$$

$$c_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} \leq w_t \tag{1.3}$$

- Commentaires

1.2.2 L'optimum individuel

- la fonction d'utilité

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) \tag{1.4}$$

— $u(\cdot)$ est croissante ($u'(\cdot) > 0$) et concave ($u''(\cdot) < 0$)

— on peut poser $\beta = 1/(1 + \theta)$ où $\theta \geq 0$ mesure le taux de préférence pour le présent

- Deux hypothèses sous tendent la fonction d'utilité (1.4)
- L'optimum

$$u'(c_{1t}) - \beta(1 + r_{t+1})u'(c_{2t+1}) = 0 \tag{1.5}$$

avec

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - c_{1t}) \tag{1.6}$$

1.2.3 Salaire, consommation et épargne

$$\frac{dc_1}{dw_t} = \frac{\beta(1+r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})}{u''(c_{1t}) + \beta(1+r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})} \in [0,1]$$

$$\frac{1}{1+r_{t+1}} \frac{dc_2}{dw_t} = 1 - \frac{dc_1}{dw_t} \geq 0$$

$$\frac{ds_t}{dw_t} = 1 - \frac{dc_1}{dw_t} \in [0,1]$$

1.2.4 Epargne et taux d'intérêt

- La hausse du taux d'intérêt (anticipé)
- Les équations de Slutsky

— c_1^h et c_2^h les demandes compensées (hicksiennes) de biens de consommation

— dw montant permettant à l'individu de maintenir son niveau d'utilité initiale

— $e\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}, U\right) = w$ dépense nécessaire pour obtenir un niveau U

$$\frac{\partial e}{\partial \frac{1}{1+r_{t+1}}} \left(-\frac{1}{(1+r_{t+1})^2}\right) dr_{t+1} = dw$$

$$c_{2t+1} \left(-\frac{1}{(1+r_{t+1})^2}\right) dr_{t+1} = dw$$

$$\frac{dw}{dr_{t+1}} = -c_{2t+1} \left(\frac{1}{(1+r_{t+1})^2}\right)$$

— en utilisant (1.6) :

$$\frac{dw}{dr_{t+1}} = -\frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}}$$

— On peut alors déterminer les dérivées c_1^h et c_2^h :

$$c_1^h(r_{t+1}) = c_1^h\left(r_{t+1}, w_t(r_{t+1})\right)$$

$$\frac{\partial c_1^h}{\partial r_{t+1}} = \frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} + \frac{\partial c_1}{\partial w_t}\left(-\frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}}\right)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} = \underbrace{\frac{\partial c_1^h}{\partial r_{t+1}}}_{(-)} + \frac{\partial c_1}{\partial w_t}\left(\frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}}\right)$$

et

$$c_2^h(r_{t+1}) = c_2^h\left(r_{t+1}, w_t(r_{t+1})\right)$$

$$\frac{\partial c_2^h}{\partial r_{t+1}} = \frac{\partial c_2}{\partial r_{t+1}} + \frac{\partial c_2}{\partial w_t}\left(-\frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}}\right)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial r_{t+1}} = \underbrace{\frac{\partial c_2^h}{\partial r_{t+1}}}_{(+)} + \frac{\partial c_2}{\partial w_t}\left(\frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}}\right)$$

- Interprétations : Effets de substitution et de revenu

◇ Effets sur la consommation
◇ Effet sur l'épargne

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} = -\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}}$$

- L'élasticité de substitution
  ◇ Conditions de dominance de l'ES sur l'ER

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} = \beta \frac{u'(c_{2t+1}) + c_{2t+1}u''(c_{2t+1})}{u''(c_{1t}) + \beta(1 + r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})}$$

— le dénominateur est négatif car $u''(\cdot) < 0$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} < 0 \Leftrightarrow 1 > \underbrace{-\frac{c_{2t+1}u''(c_{2t+1})}{u'(c_{2t+1})}}_{1/\sigma(c_{2t+1})>0}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} > 0 \Leftrightarrow \sigma(c_{2t+1}) > 1$$

◇ l'élasticité de substitution
— $1/\sigma(c_{2t+1})$: élasticité de l'utilité marginale par rapport à la consommation
— $\sigma(c_{2t+1})$ une élasticité de substitution

$$\frac{u'(c_2)}{c_2} = \frac{u'(\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2} = cste$$

— on peut donc arriver à l'élasticité de substitution (qui par définition est)

$$\frac{d \log[\tilde{c}_2/c_2]}{d \log[u'(\tilde{c}_2)/u'(c_2)]}$$

1.3 Les générations imbriquées

- le modèle de Diamond (1965)

— N_t nouveaux individus qui naissent en t
— $n = (N_t - N_{t-1})/N_{t-1} \Rightarrow N_t/N_{t-1} = 1 + n$

- Autres hypothèse

1.3.1 Le comportement des jeunes

- L'optimum de consommation intertemporel

— $(c_1(w_t, r_{t+1}), c_2(w_t, r_{t+1}))$ obtenu en utilisant (1.1), (1.2), (1.5)
— pour $s_t > 0$, (c_{1t}) croissant avec (r_{1t+1}) ssi $(\sigma(c_{2t+1}) < 1)$
— c_{2t+1} est toujours croissant avec (r_{1t+1})

- La fonction d'épargne

$$-u'(w_t - s_t) + \beta(1 + r_{t+1})u'((1 + r_{t+1})s_t) = 0$$
$$u'(w_t - s_t) - \beta(1 + r_{t+1})u'((1 + r_{t+1})s_t) = 0$$

1.3.2 Les individus vieux

— A la date t, il y a N_{t-1} individus vieux
— $s(w_{t-1}, r_t)$ épargne à la période précédente, consommation $c_{2t} = (1 + r_t)s(w_{t-1}, r_t)$

1.3.3 Les entreprises

- Le rôle du capital en $t-1$ dans la production en t

— A la date t, elle produit $F(K_{t-1}, L_t)$
- La fonction de production
  - ◇ prix des facteurs
  - — K_{t-1} au prix r_t
  - — L_t payées au prix w_t

$$F(K_{t-1}, L_t) + K_{t-1} - (1+r_t)K_{t-1} - w_t L_t$$

$$F_K(K_{t-1}, L_t) = r_t \tag{1.7}$$

$$F_N(K_{t-1}, L_t) = w_t \tag{1.8}$$

  - ◇ Homogénéité de la fonction

$$F(K_{t-1}, L_t) = r_t K_{t-1} + w_t L_t \tag{1.9}$$

$F(K_{t-1}, L_t) = F_K(K_{t-1}, L_t)K_{t-1} + F_N(K_{t-1}, L_t)L_t$ par hypothèse de l'homogénéité de degré 1 en ajoutant $F_K(K_{t-1}, L_t) = r_t \Longrightarrow F_N(K_{t-1}, L_t) = w_t$

- La production sous forme intensive

$$r_t = r(k_t) = f'(k_t)$$
$$w_t = w_t(k_t) = f(k_t) - r(k_t)k_t$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = +\infty,\ f'(+\infty) = 0$$

1.4 Equilibre intertemporel

- Description de l'équilibre

$$N_t = L_t \tag{1.10}$$

  - ◇ Equilibre sur le marché du capital

$$\underbrace{K_{t-1}}_{\text{capital prêté en début de période}} + N_t s_t - \underbrace{K_{t-1}}_{\text{capital rendu et consommé en fin de période}} = K_t \tag{1.11}$$

  - ◇ Equilibre sur le marché du bien

$$N_t c_{1t} + N_t s_t = w_t N_t$$
$$N_{t-1} c_{2t} = (1+r_t) N_{t-1} s_{t-1}$$
$$r_t K_{t-1} + w_t N_t = F(K_{t-1}, N_t)$$

en utilisant $N_{t-1}s_{t-1} = K_{t-1}$

$$N_t(c_{1t} + s_t) + N_{t-1}c_{2t} = K_{t-1} + F(K_{t-1}, N_t)$$

$$F(K_{t-1}, N_t) = N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} + K_t - K_{t-1}$$

- définition de l'équilibre

$$N_t s_t = K_t \Longleftrightarrow s_t = (1+n)\frac{K_t}{N_{t+1}} \Longleftrightarrow s_t = (1+n)k_{t+1}$$

Définition 1 *Un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est une suite* $(k_t, t \geq 0)$ *telle que*

$$s_t(w(k_t), r(k_{t+1})) = (1+n)k_{t+1} \tag{1.12}$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$*, étant donné* k_0.

- déroulement à la période t
  - ⋆ Phase 1
  - — stock de capital K_{t-1}
  - — Prix (r_t, w_t), Demande de l'entreprise K_{t-1} unités de capital et N_t travailleurs
  - ⋆ Phase 2
  - — production $F(K_{t-1}, N_t)$ biens de consommation
  - — rémunération : $(1+r_t)K_{t-1}$ et $w_t N_t$
  - ⋆ Phase 3
  - — Consommation des vieux : $N_{t-1}c_{2t} = (1+r_t)K_{t-1}$
  - — Consommation des jeunes $N_t c_{1t} = N_t(w_t - s_t)$
  - — "reliquat" $N_t s_t$
  - — équilibre à chaque date si $N_t s_t = K_t$ ie la condition (1.12)
- Existence de l'équilibre et caractéristiques
  - ◇ Analyse technique
  - — si $k_t \to 0$ alors $w_t \to 0$ et $s_t \to 0$ donc $k_{t+1} \to 0$
  - — (1.12) $\Rightarrow k_{t+1} = g(k_t)$

$$s_w(w(k_t), r(k_{t+1}))w'(k_t)dk_t + s_r(w(k_t), r(k_{t+1}))r'(k_{t+1})dk_{t+1} = (1+n)dk_{t+1} \tag{1.13}$$

  - ◇ Unicité de l'équilibre
  - ◇ Interprétation
- Equilibres stationnaires

Définition 2 *Un équilibre stationnaire est une suite* $(k_t = k^*, t \geq 0)$ *telle que :*

$$s(w(k^*), r(k^*)) = (1+n)k^*$$

où $k_0 = k^*$ *est donné.*

  - ◇ Existence de l'équilibre stationnaire

$$s(w(k), r(k)) - (1+n)k = 0$$

  - — $k = 0$ une racine de l'équation mais $(u'(\cdot) \to +\infty)$
  - — lorsque $k \to +\infty$, s bornée ($s \in [0,1]$) donc $k \to +\infty$, $s(w(k), r(k)) - (1+n)k < 0$
  - — si $s'(w(0), r(0)) > (1+n)$, alors nombre de racines est impair
  - — si $s'(w(0), r(0)) < (1+n)$, alors nombre de racines est pair
  - ◇ Stabilité de l'équilibre stationnaire

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{s_w(w(k^*), r(k^*))w'(k^*)}{(1+n) - s_r(w(k^*), r(k^*))r'(k^*)}$$

  - — l'équilibre stationnaire : $k_t \to k^*$ quand $t \to +\infty$.
  - — on peut montrer que $0 < \frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1$
  - — Quand $s_r > 0$ alors $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} > 0$ à l'équilibre
  - — Par ailleurs,

$$0 \leq \frac{k_{t+1}}{k_t} \leq (1+n)\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{s(w(k_t), r(k_t))}{k_t} \leq \frac{w_t}{k_t} = \frac{f(k_t)}{k_t} - f'(k_t)$$

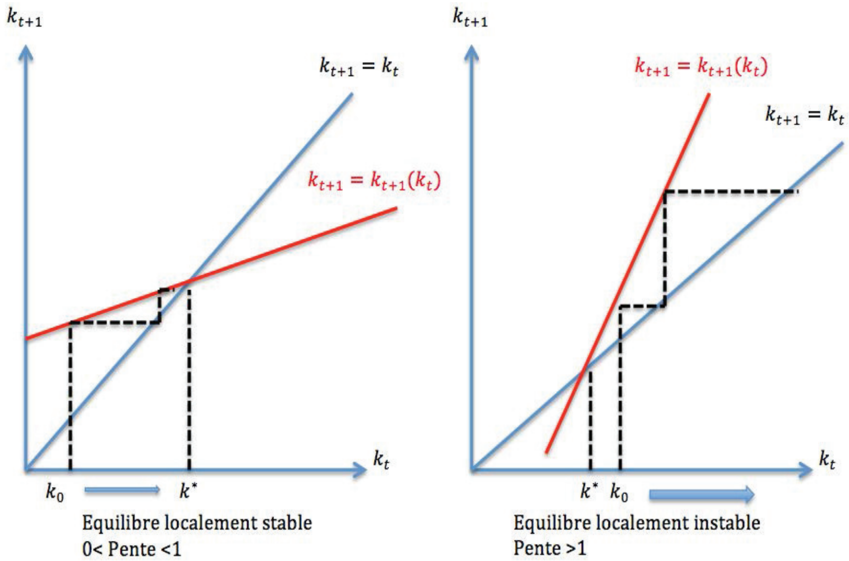

Figure 1.1 – **Stabilité et instabilité locales**

— les conditions d'Inada impliquent que

$$\lim_{k_t \to +\infty} \left(\frac{f(k_t)}{k_t} - f'(k_t) \right) = 0$$

◇ Représentation graphique

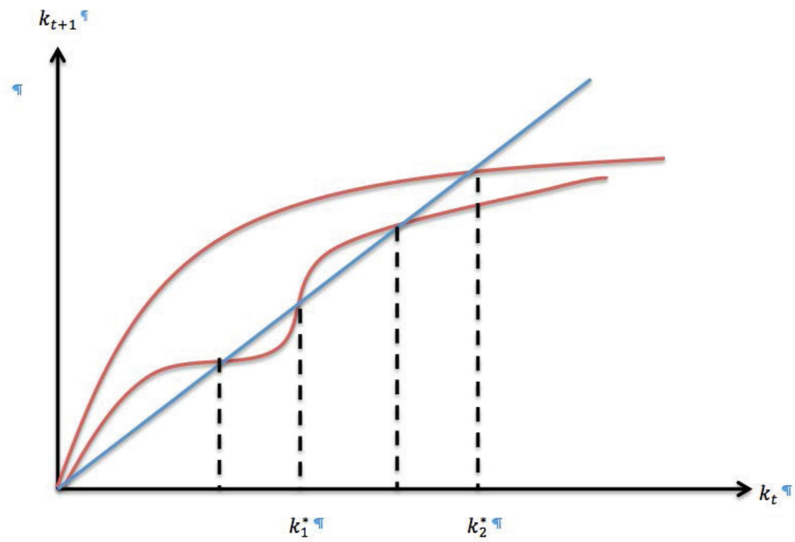

Figure 1.2 – **Stabilité de l'équilibre stationnaire**

1.5 L'optimalité

1.5.1 La règle d'or d'accumulation

- Consommation à l'équilibre stationnaire

$$N_t c_{1t} + K_t + N_{t-1} c_{2t} = K_{t-1} + F(K_{t-1}, N_t)$$

$$c_{1t} + (1+n)k_{t+1} + \frac{c_{2t}}{1+n} = k_t + f(k_t)$$

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = k_t + f(k_t) \text{ où } c_t = c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n} \tag{1.14}$$

— c_t consommation/tête en t par tête d'individu né en t
— $k_t = k_{t+1} = k^*$ constant, donc $w = w(k^*) = w^*$ et $r = r(k^*) = r^*$ constants
— c_{1t} et c_{2t} constantes, $c_t = c^*$ constant :

$$c^* + nk^* = f(k^*) \tag{1.15}$$

- La règle d'or

$$f'(k^*_{or}) = n \tag{1.16}$$

- Dynamique de transition vers la règle d'or

— L'inefficacité dynamique
  ◇ Situation initiale
  — Equilibre stationnaire initial k^*
  — en t, variation dk^* à compter de la date $t+1$
  ◇ Que se passe-t-il en t ?
  — $dk_t = 0$ et $dk_{t+1} = dk^*$
  — A partir de (1.14),

$$dc_t = -(1+n)dk_{t+1} \tag{1.17}$$

  ◇ Que se passe-t-il à partir de $t+1$?

$$dc_t = (f'(k^*) - n)dk^* \tag{1.18}$$

  ◇ effet sur la consommation

1.5.2 Efficacité dynamique

- Le cas $k^* < k^*_{or}$
- La condition d(in)efficacité dynamique : une intuition
  ◇ Situation de départ

$$\frac{\beta u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1}{1+r^*}$$

  ◇ La redistribution
  — $dc_2 = -\alpha dc_1$

$$u'(c_1)dc_1 + \beta u'(c_2)dc_2$$

$$\left(1 - \alpha\frac{\beta u'(c_2)}{u'(c_1)}\right) dc_1 > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{1+r^*}\right) dc_1 > 0$$

  — Réalisibilité du schéma de redistribution $\alpha = 1+n$

$$\left(1 - \frac{1+n}{1+r^*}\right) dc_1 > 0 \Leftrightarrow (r^* - n)dc_1 > 0$$

  ◇ Conditions d'(in)efficacité dynamique
- Application aux données françaises
  ◇ les données
  — Approximation taux de croissance démographique : 0,02
  — si Production Cobb-Douglas :$y = Ak^\alpha - \delta k$ avec $\alpha = 0,3$ et $\delta = 0,15$
  — en 2006, $Y = 972$Md€ et $K = 3702,6$Md€
  — CPO $\alpha y = (r - \delta)k, \Rightarrow r = 0,1(> n = 0,02)$
  — $s_{or} = \alpha$ soit 30%
  — or, Epargne ne dépasse pas les 20% du PIB
  ◇ Conclusion : dynamiquement efficace en France